Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 5

Abgabe: Dienstag, den 21. Mai 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 5.1 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper. $D : K[x] \to K[x]$ bezeichnet die formale Ableitung auf $K[x]$. Erinnerung: In der Linearen Algebra I, Zusatzaufgabe zu Blatt 10 wurde gezeigt, dass $D : K[x] \to K[x]$ ein linearer Operator ist. Berechnen Sie $\ker(D)$ und R_D für

(a) $\mathrm{Char}(K) = 0$,
(b) $\mathrm{Char}(K) = p$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5.2 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) = 0$.

(a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von $x^3 - 2x^2 + x - 4$ in 2.
(b) Seien $f_0, \dots, f_n \in K[x]_{\leq n}$ mit $\deg(f) = i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Zeigen Sie, dass $\{f_0, \dots, f_n\}$ eine Basis von $K[x]_{\leq n}$ ist.
(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien
$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n), \quad \mathcal{B}' = (1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^n).$$
Nach (b) sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von $K[x]_{\leq n}$. Geben Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ an.
(d) Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 9.5 (Taylorentwicklung): Mit der Notation aus dem Satz, zeigen Sie, dass $l_i(p_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 0, \dots, n$ gilt.

Aufgabe 5.3 *(4 Punkte)*

Diese Aufgabe schließt an Aufgabe 4.4 an: Sei K ein Körper, $t_0, \dots, t_n \in K$ paarweise verschieden und
$$P_i := \prod_{j \neq i} \frac{x - t_j}{t_i - t_j} \quad (i = 0, \dots, n).$$
Betrachten Sie die Basen $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ und $\mathcal{B}' = (P_0, \dots, P_n)$ von $K[x]_{\leq n}$. Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ gegeben ist durch
$$\begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}.$$
Diese Matrix wird als *Vandermonde-Matrix* bezeichnet.

Aufgabe 5.4 *(4 Punkte)*

(a) Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\langle 2x^2 + 4x - 10, x + 2 \rangle = K[x]$ gilt.
(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 9.8 die Nullstellen mit entsprechenden Vielfachheiten des folgenden Polynoms:
$$f(x) = 27 + 18x - 12x^2 - 2x^3 + x^4.$$
(c) Zeigen Sie, dass für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und jedes $a \in \mathbb{F}_p$ das Polynom $x^p - a \in \mathbb{F}_p[x]$ eine Nullstelle mit Vielfachheit ≥ 2 besitzt.

Zusatzaufgabe für Interessierte. *(4 Bonuspunkte)*

(a) Beweisen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie ein Ideal von $\mathbb{Q}[x]$ sind:
   (i) $\{f \in \mathbb{Q}[x] : f(0) = 0\}$,
   (ii) $\{f \in \mathbb{Q}[x] : f = 0 \text{ oder } \deg(f) \leq 4\}$,
   (iii) $\{f \in \mathbb{Q}[x] : D(f)(2) = 0\}$.

(b) Sei K ein Körper und I_i ein Ideal von $K[x]$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ ist ein Ideal von $K[x]$.

(c) Sei K ein Körper und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K[x]$. Zeigen Sie: das von $\{a_1, \ldots, a_n\}$ erzeugte Ideal ist gleich dem Durchschnitt aller Ideale, die $\{a_1, \ldots, a_n\}$ enthalten.